第７講　場合の数・確率

1　1 個のさいころを繰り返し投げ，出た目を順にかけて積を作っていく．

(1)　n 回さいころを投げたときはじめて積が 12 になる確率 p_n を求めよ．

(2)　n 回さいころを投げたとき積が 12 である確率 q_n を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ n 個の袋の中にそれぞれ赤球が 1 個，白球が 9 個入っている．これらの n 個の袋からそれぞれ 1 個ずつ球を取り出したとき，赤球が奇数個取り出される確率を p_n とする．

(1) p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

(2) p_n を求めよ．

［2］ 箱 A，箱 B のそれぞれに赤球が 1 個，白球が 3 個，合計 4 個ずつ入っている．1 回の試行で箱 A の球 1 個と箱 B の球 1 個を無作為に選び交換する．この試行を n 回繰り返した後，箱 A に赤球が 1 個，白球が 3 個入っている確率 p_n を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　n 枚のカードがあり，1枚目のカードに1，2枚目のカードに2，……，n 枚目のカードに n が書かれている．これらの n 枚のカードから無作為に1枚を取り出してもとに戻すことを3回行う．取り出されたカードに書かれている数を取り出された順に x, y, z とする．

(1)　$x>y$ となる確率 p を求めよ．

(2)　$2x=y+z$ となる確率 q を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　場合の数・確率

1 　1 個のさいころを繰り返し投げ，出た目を順にかけて積を作っていく．

(1)　n 回さいころを投げたときはじめて積が 12 になる確率 p_n を求めよ．

(2)　n 回さいころを投げたとき積が 12 である確率 q_n を求めよ．

積が 12 になる出目の積の組合せを考えると，$2\cdot6$，$3\cdot4$，$2\cdot2\cdot3$ のみである．

(1)　n 回投げてはじめて積が 12 になるときを考える．

$n=1$ のときにはならない．よって　$p_1=0$

$n=2$ のとき　2 回の出目の組合せは　$(2,\ 6)$，$(3,\ 4)$

出目の出る順を考えてそれぞれ　$2!=2$ 通り　　よって　$p_2=2\cdot\dfrac{2}{6^2}=\dfrac{1}{9}$

$n\geqq3$ のときは以下

(i)　n 回目，および 1 から $(n-1)$ 回中 1 回に $(2,\ 6)$ が出て，あとはすべて 1 のとき．
場合の数は　$(n-1)\cdot2!=2(n-1)$（通り）

(ii)　(i)で $(3,\ 4)$ が出たとき．　　場合の数は $2(n-1)$ 通り

(iii)　n 回目, および 1 から $(n-1)$ 回中 2 回で $(2,\ 2,\ 3)$ が出て, あとはすべて 1 のとき．

場合の数は　${}_{n-1}\mathrm{C}_2\cdot\dfrac{3!}{2!}=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2\cdot1}\cdot3=\dfrac{3}{2}(n-1)(n-2)$　（通り）

以上より　$p_n=\dfrac{1}{6^n}\left\{2(n-1)+2(n-1)+\dfrac{3}{2}(n-1)(n-2)\right\}=\boldsymbol{\dfrac{(n-1)(3n+2)}{2\cdot6^n}}$

これは $n=1$，2 のときも成立する．

(2)　k 回目（$1\leqq k\leqq n$）にはじめて積が 12 となり，残り $(n-k)$ 回はすべて 1 のときは

$\dfrac{(k-1)(3k+2)}{2\cdot6^k}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-k}$　通りある．

よって，求める確率は

$$q_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)(3k+2)}{2\cdot6^k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-k}=\frac{1}{2\cdot6^n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)(3k+2)=\frac{1}{2\cdot6^n}\sum_{k=1}^{n}(3k^2-k-2)$$

$$=\frac{1}{2\cdot6^n}\left\{3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)-2n\right\}$$

$$=\frac{1}{2\cdot6^n}\cdot\frac{n}{2}\{(n+1)(2n+1)-(n+1)-4\}=\frac{1}{2\cdot6^n}\cdot\frac{n}{2}\cdot2(n-1)(n+2)$$

$$=\boldsymbol{\frac{n(n-1)(n+2)}{2\cdot6^n}}$$

2 　[1]　n 個の袋の中にそれぞれ赤球が 1 個，白球が 9 個入っている．これらの n 個の袋からそれぞれ 1 個ずつ球を取り出したとき，赤球が奇数個取り出される確率を p_n とする．

(1)　p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

(2)　p_n を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(1)　$n+1$ 個の袋からそれぞれ 1 個ずつ球を取り出したとき，赤球が奇数個取り出されるのは

・n 個の袋から赤球を奇数個取り出し，$n+1$ 個目の袋から白球を取り出すとき

・n 個の袋から赤球を偶数個取り出し，$n+1$ 個目の袋から赤球を取り出すとき

のいずれかである.

よって　$p_{n+1}=p_n\cdot\dfrac{9}{10}+(1-p_n)\cdot\dfrac{1}{10}$　　ゆえに　$\boldsymbol{p_{n+1}=\dfrac{4}{5}p_n+\dfrac{1}{10}}$　……①

(2)　①より　$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{5}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$，　$p_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{2}{5}$

よって　$p_n-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$　　ゆえに　$\boldsymbol{p_n=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right\}}$

2　[2]　箱 A，箱 B のそれぞれに赤球が 1 個，白球が 3 個，合計 4 個ずつ入っている. 1 回の試行で箱 A の球 1 個と箱 B の球 1 個を無作為に選び交換する. この試行を n 回繰り返した後，箱 A に赤球が 1 個，白球が 3 個入っている確率 p_n を求めよ.

$(n+1)$ 回目に題意の条件を満たすのは次の通り.

(i)　n 回目の試行後に A に赤球 1 個，白球 3 個が入っているとき

このとき B には赤球 1 個，白球 3 個が入っている.

$(n+1)$ 回目に A，B ともに赤球，またはともに白球を取り出し交換すればよい.

(ii)　n 回目の試行後に A に赤球 0 個，白球 4 個が入っているとき

このとき B には赤球 2 個，白球 2 個が入っている.

$(n+1)$ 回目に A からは必ず白球を取り出すこととなり，B からは赤球を取り出してそれと交換するとよい.

(iii)　n 回目の試行後に A に赤球 2 個，白球 2 個が入っているとき

$(n+1)$ 回目に B からは必ず白球を取り出すこととなり，A からは赤球を取り出してそれと交換するとよい.

よって　$p_{n+1}=p_n\left\{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right\}+(1-p_n)\cdot\dfrac{1}{2}$　より

$p_{n+1}=\dfrac{1}{8}p_n+\dfrac{1}{2}$　　つまり　$p_{n+1}-\dfrac{4}{7}=\dfrac{1}{8}\left(p_n-\dfrac{4}{7}\right)$，$p_0-\dfrac{4}{7}=1-\dfrac{4}{7}=\dfrac{3}{7}$

したがって　$p_n-\dfrac{4}{7}=\dfrac{3}{7}\left(\dfrac{1}{8}\right)^n$　　ゆえに　$\boldsymbol{p_n=\dfrac{4}{7}+\dfrac{3}{7}\left(\dfrac{1}{8}\right)^n}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　n 枚のカードがあり，1枚目のカードに1，2枚目のカードに2，……，n 枚目のカードに n が書かれている．これらの n 枚のカードから無作為に1枚を取り出してもとに戻すことを3回行う．取り出されたカードに書かれている数を取り出された順に x, y, z とする．

(1)　$x>y$ となる確率 p を求めよ．

(2)　$2x=y+z$ となる確率 q を求めよ．

(1)　z は任意．x，y のすべての場合の数は　n^2 通り

$x>y$ となる場合は，n 枚中2枚を取り出し，それを大きい順に x，y とした場合の数と同じで，${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 通り．ゆえに，求める確率は　$p=\dfrac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2}=\boldsymbol{\dfrac{n-1}{2n}}$

(2)　どのカードが取り出されることも，その回数によらず同様に確からしい．

$2x=y+z$ が成り立つとき，x，y を適正に決めれば z も決まることから

x をある値に決めたとき y が何通りあるかを求め，x を動かして合計すればよい．

$x=k$　$(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ と決めたとき　$2x$ すなわち $2k$ の値に注目する．

(i)　$2k\leqq n$　つまり　$1\leqq k\leqq \dfrac{n}{2}$ のとき　$y=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2k-1$ の $(2k-1)$ 通り．

(ii)　$n<2k$　つまり　$\dfrac{n}{2}<k\leqq n$ のとき

$y\leqq n$　かつ　$z\leqq n$　　すなわち　$2k-n\leqq y\leqq n$ の

$n-(2k-n)+1=2n-2k+1$（通り）

n が偶数のとき　$n=2m$ とおくと

(i)　$k\leqq m$ のとき　　(ii)　$m+1\leqq k$ のとき　　であるから

$$\sum_{k=1}^{m}(2k-1)+\sum_{k=m+1}^{n}(2n-2k+1)=m^2+\sum_{k=m+1}^{n}2n-\sum_{k=m+1}^{n}(2k-1)$$

$$=m^2+2n\cdot(n-m)-(n^2-m^2)=m^2+(n-m)^2=\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2=\frac{n^2}{2}$$

n が奇数のとき　$n=2m-1$ とおくと

(i)　$k\leqq m-1$ のとき　　(ii)　$m\leqq k$ のとき　　であるから

$$\sum_{k=1}^{m-1}(2k-1)+\sum_{k=m}^{n}(2n-2k+1)=(m-1)^2+2n\cdot(n-m+1)-\{n^2-(m-1)^2\}$$

$$=(m-1)^2+(n-m+1)^2=\left(\frac{n-1}{2}\right)^2+\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{n^2+1}{2}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

以上より　$q=\begin{cases} \dfrac{\frac{n^2}{2}}{n^3}=\dfrac{1}{2n} & (n\text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{\frac{n^2+1}{2}}{n^3}=\dfrac{n^2+1}{2n^3} & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 n は2以上の自然数とする．袋の中に1から n までの数が1つずつ書かれた n 個の玉が入っている．この袋から無作為に玉を1個取り出し，それに書かれている数を自分の得点としたのち，取り出した玉を袋に戻す．この試行をA，B，Cの3人が順に行い，3人の中で最大の得点の人を勝者とする．例えば，A，B，Cの得点がそれぞれ4，2，4のときはAとCの2人が勝者であり，3人とも同じ得点のときはA，B，Cの3人とも勝者である．勝者が k 人（$k=1,\ 2,\ 3$）である確率を $P_n(k)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) 勝者が3人である確率 $P_n(3)$ を n を用いて表せ．

(2) $n=3$ の場合に勝者が2人である確率 $P_3(2)$ を求めよ．

(3) 勝者が1人である確率 $P_n(1)$ を n を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標平面上に4点A(0，1)，B(0，0)，C(1，0)，D(1，1)を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点Qが1秒ごとに1つの頂点から隣の頂点に移動しているとする．さらに，点Qは，x軸と平行な方向の移動について確率p，y軸と平行な方向の移動について確率$1-p$で移動しているものとする．最初に点Qが頂点Aにいたとするとき，n秒後に頂点A，Cにいる確率をそれぞれa_n，c_nとする．

(1)　a_2，c_2，a_4，c_4を求めよ．

(2)　a_{2n}を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　n は2以上の自然数とする．袋の中に1から n までの数が1つずつ書かれた n 個の玉が入っている．この袋から無作為に玉を1個取り出し，それに書かれている数を自分の得点としたのち，取り出した玉を袋に戻す．この試行をA，B，Cの3人が順に行い，3人の中で最大の得点の人を勝者とする．例えば，A，B，Cの得点がそれぞれ4，2，4のときはAとCの2人が勝者であり，3人とも同じ得点のときはA，B，Cの3人とも勝者である．勝者が k 人 $(k=1,\ 2,\ 3)$ である確率を $P_n(k)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) 勝者が3人である確率 $P_n(3)$ を n を用いて表せ．

(2) $n=3$ の場合に勝者が2人である確率 $P_3(2)$ を求めよ．

(3) 勝者が1人である確率 $P_n(1)$ を n を用いて表せ．

(1) 勝者が3人となるのは3人とも同じ数を取り出したとき．

よって　$P_n(3)=\dfrac{n}{n^3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{n^2}}$

(2) 勝者が2人となるとき，場には2種類の数が出ている．その数の選び方が ${}_3C_2$ 通り．そのうち大きい方の数を出したのが2人．その2人の選び方が ${}_3C_2$ 通り．

よって　$P_3(2)=\dfrac{3\times3}{3^3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(3) 勝者が1人となるのは以下の場合である．

(i) 場に3種類の数が出ている

(ii) 場に2種類の数が出ていて，大きい方の数を出したのが1人のみ．

(i)のとき

3種類の数の選び方が ${}_nC_3$ 通り，その3つの数を誰が出したのかで3!通り

(ii)のとき

2種類の数の選び方が ${}_nC_2$ 通り，そのうち大きい方の数を出した1人の選び方が ${}_3C_1$ 通り

よって　$P_n(1)=\dfrac{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2}\times6+\dfrac{n(n-1)}{2}\times3}{n^3}=\boldsymbol{\dfrac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}}$

【別解】 勝者が1人となるとき，その数を $k\ (2\leqq k\leqq n)$ とすると，残り2人の出した数字は $k-1$ 以下．また，勝者が誰かの選び方が ${}_3C_1$ 通り．

したがって，その確率は　$\dfrac{3(k-1)^2}{n^3}$

よって　$P_n(1)=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{3(k-1)^2}{n^3}$　←「固定」して「動かす」

$=\dfrac{3}{n^3}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(k-1)^2=\dfrac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1}i^2$

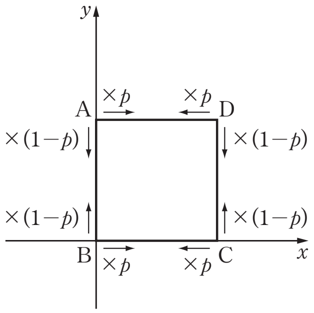
$=\dfrac{3}{n^3}\cdot\dfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1)=\boldsymbol{\dfrac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}}$

【別解】の考え方は「出た数字」に注目した．今回の問題設定では，出した数が何であるかは決める必要がない．問われてない＝決める必要がない，となるか否かの判断ができるようにしておきたい．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標平面上に4点A(0, 1), B(0, 0), C(1, 0), D(1, 1)を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点Qが1秒ごとに1つの頂点から隣の頂点に移動しているとする．さらに，点Qは，x軸と平行な方向の移動について確率p，y軸と平行な方向の移動について確率$1-p$で移動しているものとする．最初に点Qが頂点Aにいたとするとき，n秒後に頂点A，Cにいる確率をそれぞれa_n，c_nとする．

(1)　a_2，c_2，a_4，c_4を求めよ．　　(2)　a_{2n}を求めよ．



(1)　点QがAを出発し，2秒後にAにいるのは

A→B→A　または　A→D→A　と移動したとき．

よって　$a_2=(1-p)^2+p^2=\mathbf{2p^2-2p+1}$

点QがAを出発し，2秒後にCにいるのは

A→B→C　または　A→D→C　と移動したとき．

よって　$c_2=(1-p)p+p(1-p)=\mathbf{-2p^2+2p}(=1-a_2)$

点QがAを出発し，4秒後にAにいるのは，

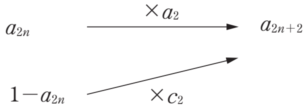
2秒後にA，4秒後にA　(確率$a_2\times a_2$)

2秒後にC，4秒後にA　(確率$c_2\times\{(1-p)p+p(1-p)\}=c_2\times c_2$)　と移動したとき．

よって　$a_4=(a_2)^2+(c_2)^2=\mathbf{8p^4-16p^3+12p^2-4p+1}$

4秒後には点QはAまたはCにのみ存在する．

よって　$c_4=1-a_4=\mathbf{-8p^4+16p^3-12p^2+4p}$



(2)　$a_{2n+2}=a_{2n}\times a_2+c_{2n}\times c_2$

$=a_{2n}\cdot(2p^2-2p+1)+(1-a_{2n})\cdot(-2p^2+2p)$

よって　$a_{2n+2}=(2p-1)^2a_{2n}-2p^2+2p,\quad a_0=1$

つまり　$a_{2n+2}-\dfrac{1}{2}=(2p-1)^2\left(a_{2n}-\dfrac{1}{2}\right),\quad a_0-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

したがって　$a_{2n}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\{(2p-1)^2\}^n$

ゆえに　$a_{2n}=\mathbf{\dfrac{1}{2}\{1+(2p-1)^{2n}\}}$

確率漸化式である．前の状態に何が起これば次の状態になるかを漸化式で表し，それを解くことで確率を求める手法．今一度確認を．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。